MANUEL BREMER

Possibilia: notwendig, möglich oder überflüssig?

§1 Vorüberlegungen zur Rede über Possibilia

Wenn wir fragen, wie die Welt anders beschaffen sein könnte, denken wir auch an die Existenz von Gegenständen, die es in der Wirklichkeit nicht gibt oder in dieser bald nicht mehr geben wird oder bezüglich derer wir nicht sicher sind, dass es sie gibt. Wir verwenden dabei einen Namen wie „das Einhorn“ und lassen es offen, ob es den betreffenden Gegenstand wirklich gibt, oder sind vielleicht sogar von dessen Nichtexistenz überzeugt. Wir halten es aber für möglich, dass es diesen Gegenstand gibt oder dass die Weltgeschichte doch hätte so verlaufen können, dass es ihn gibt – d.h.: wir denken uns mögliche Welten, in denen der betreffende Gegenstand vorkommt. Insofern ist er für uns ein möglicher Gegenstand. Kontexte, in denen Possibilia (mögliche Gegenstände) auftreten sind „Suchen“

(1) Der schwarze Ritter suchte nach dem Einhorn.

oder „Meinen“

(2) Johnny meint, in Sleepy Hollow treibt der kopflose Reiter sein Unwesen.

bzw. allgemein sogenannte „intentionale Kontexte“.

Eine Reihe solcher Beispiele lassen sich in einer Kennzeichnungstheorie Russellschen Types, welche die vermeintlichen Gegenstände auf die Rede von instantiierten Prädikatoren reduziert, behandeln. Der Gegenstand von Johnnys Meinung in (2) wäre dann nicht der kopflose Ritter, sondern der Existenz*satz*

(3)$(\exists x)(\text{KopfloseRitter}(x) \wedge (\forall y)(\text{KopfloseRitter}(y) \supset y=x) \wedge ...$

der mit der Kennzeichnungsdefinition beginnt. Während sich diese Reformulierung bei (2) noch recht schnell ergibt, müssen vermeintlich referentielle Kontexte wie „Suchen“ so reanalysiert werden, dass wir in der Tiefenstruktur eine entsprechende Meinung zu einer Existenzbehauptung wiederfinden können. In der Kategorial/Montague-Grammatik, die nun in

der entsprechenden Reanalyse allerdings über den *Begriff* des Einhorns quantifiziert, sieht (1) dann – mindestens – so aus:

(4) Past(λQ)[Q(schwarzeRitter')]
(sucht'(^λP[(∃x)[Einhorn'(x)∧P(x)]]))

Begriffe sind aber eventuell nicht weniger problematisch als Possibilia. Vor allem jedoch gibt es Kontexte, in denen eine Kennzeichnungstheorie zu inkorrekten Ergebnissen führt. Sie macht alle direkte Kontexte, in denen (vermeintliche) Possibilia vorkommen zu Existenzaussagen. Während

(5) Das Einhorn ist das Einhorn.

intuitiv akzeptabel ist – was und wo auch immer das Einhorn sein mag –, führt die Reformulierung durch die Kennzeichnungstheorie zu einer Existenzaussage der Art von

(6) (∃x)(Einhorn(x)∧(∀y)(Einhorn(y)⊃y=x)∧x=x)

die jedenfalls – anders als intuitiverweise (5) – nicht tautologischerweise wahr ist. Schwerwiegender noch ist das Versagen, alle Meinenskontexte mit Possibilia als *de dicto* auffassen zu müssen (also mit einer Existenzaussage als Objekt des intentionalen Zustandes). Wie zu formalisieren ist dann:

(7) Bezüglich des Yeti sind Messner und Bremer verschiedener Meinung.

Entweder müsste man diesen Satz in mehrere aufspalten (Berichte über Messner und Bremers Meinungen, die sich in ihrem Gehalt unterscheiden), wieso haben Messner und Bremer aber dann, nachdem „Yeti" zugunsten einer Kennzeichungsformel eliminiert wurde, Meinungen über dassselbe? Oder man formalisiert (7) als *de re* Existenzaussage, die dann indessen falsch ist/sein kann, obwohl wir (7) unabhängig von der Existenz des Yeti für wahr halten (können).

All das sind m.E. Gründe genug, nicht den Weg einer Kennzeichnungstheorie mit Existenzbehauptungen zu gehen. Bei fiktionalen Entitäten (etwa der möglichen Welt mit Graf Dracula) ist dies besonders deutlich.

Auf der anderen Seite erscheint mir eine ontologische Festlegung auf Possibilia äußerst unplausibel: Was für Dinge sollen dies sein? Wo befinden sie sich? Oder warum darf man nicht so fragen?

Am besten wäre es, (a) sowohl frei (mit Eigennamen und Kennzeichnungen) über Possibilia zu reden als auch (b) dabei sich nicht auf einen weiteren eigentümlichen Bereich von Entitäten festzulegen. Eine

Lösung für (a) könnte eine Form der Freien Logik sein, die beliebige singuläre Terme zuläßt und mittels eines Existenzprädikators zwischen den wirklichen und den nur möglichen unterscheidet. Ich werde daher einen modallogischen Kalkül des Natürlichen Schließens um entsprechende Quantifikationsregeln der Freien Logik ergänzen. Eine Lösung für (b) *scheint* eine substitutionelle Lesart der Quantifikation zu sein: Wenn wir die Terme substitutionell verstehen, könnte man dies vielleicht so deuten: Es bezieht sich der schware Ritter in seinen Meinungen auf eine Repräsentation des Einhorns, nicht auf einen möglichen Gegenstand. Doch schon diese Formulierung beinhaltet das Problem: Bei substitutioneller Quantifikation trifft es nicht nur das Einhorn, sondern auch den Ritter selbst; alle Terme werden ja nur substitutionell verstanden. Die substitutionelle Lesart der Quantifikation macht keinen Unterschied zwischen den Termen für Gegenstände, die wir für real halten, und Termen für Possibilia. Man bräuchte eine Semantik, die genau diese Trennung mitvollzieht, also zum Teil referentiell ist und nur bezüglich der Possibilia substitutionel. Mein größeres Anliegen ist, eine solche – zugegeben etwas gekünstelt auftretende – Semantik vorzuführen. Sie rechtfertigt sich durch ihre Leistung.

§2 Freie Quantifikationsregeln für Possibilia

Mögliche Welten unterscheiden sich somit darin, welche Gegenstände es in ihnen gibt. Um dies darzustellen, bieten sich zwei grundsätzlich verschiedene Modelle an:

(a) Das Universum, auf das sich die Quantoren beziehen, ist in allen möglichen Welten dasselbe. Dann beziehen sich die Quantoren aber nicht auf existierende Gegenstände allein, sondern auch auf mögliche Gegenstände. Aus diesen möglichen Gegenständen sind diejenigen auszusondern, die in einer betreffenden Welt existieren (die "inner domain"). Alle anderen bilden die „outer domain“. Dazu bedarf es des Existenzprädikators. Die Extension des Existenzprädikators bestimmt dann die in einer Welt existierenden Gegenstände. Mittels des Existenzquantors lassen sich dann restringierte Quantoren, die sich ausschließlich auf existierende Gegenstände beziehen, einführen (vgl. Kutschera 1976: 15ff., 46f.).

(b) Jede mögliche Welt hat ein eigenes Universum existierender Gegenstände, über das allein die Quantoren laufen. Dieses Modell, das auf Kripke (1963) zurückgeht, beläßt die Quantoren in ihrem üblichen Verständnis. In der Extension des Existenzprädikators befinden sich genau die Gegenstände, über die quantifiziert wird. Nun referieren aber wie in (a) nicht mehr alle singulären Terme auf Gegenstände im Universum von w_i. Es mag zwar eine Welt geben, in der alle Gegenstände existieren, deren Existenz wir überhaupt in irgendeiner Welt zulassen. Doch können wir mit dem Kennzeichnungsoperator singuläre Terme einführen (wie: $(\iota x)(F(x) \wedge \neg F(x))$, die in *keiner* Welt auf einen existenten Gegenstand referieren (da es keinen Gegenstand geben kann, der diese Aussonderungsbedingung erfüllt). Lassen wir beliebige singuläre Terme zu, folgen wir unserer Intuition, dass wir auch über Gegenstände reden können, die in der aktualen Welt nicht existieren. Diese Terme referieren nicht, insofern wir Referenz als kausale oder kriterielle Relation zu einem Gegenstand auffassen. Wir können jedoch sagen, dass sie für nichtexistente Gegenstände "stehen". Nehmen wir außerdem an, dass wir über solche Gegenstände etwas sinnvolles sagen können (wie: "Gibt es das Einhorn, dann hat es vier Beine."), dann haben wir *auch hier* in Modell (b) einen Bereich von Entitäten jenseits des Universums der in wi existierenden Gegenstände. Dies ergibt sich nicht nur aus dem Argument bezüglich "$(\iota x)(F(x) \wedge \neg F(x)$", sondern schon aus der möglichen Vereinigung der Universen aller möglichen Welten: dem Universum der Gegenstände, die in mindestens einer möglichen Welt existieren. Dass sie in mindestens einer möglichen Welt existieren, heißt indessen nicht, dass sie in der aktualen Welt existieren. Wo befinden sie sich aber dann? Das Argument bezüglich "$(\iota x)(F(x) \wedge \neg F(x)$" zeigt allein, dass der Bereich jenseits eines weltrelativen Universums mächtiger ist als die Vereinigung der weltrelativen Universen.[1]

Das Problem der Possibilia stellt sich somit sowohl in (a) als auch in (b). Ich werde hier deshalb eine noch weiter abgeschwächte Variante des Modells (b) verfolgen, da in (b) jedenfalls nicht über Possibilia quantifiziert und damit kein "ontological commitment" in Quines Sinne

---

1) Der Ausdruck "$(\iota x)(F(x) \wedge \neg F(x)$" mag es uns aber schwer machen, hier von einem Bereich möglicher Gegenstände zu reden, denn den Gegenstand, der diesem Ausdruck entspricht, kann es in keiner möglichen Welt geben. Eine besondere Behandlung oder ein syntaktische Verbot von Ausdrücken wie "$(\iota x)(F(x) \wedge \neg F(x)$" würde allerdings weitere Verkomplizierungen mit sich bringen.

eingegangen wird. In der vorzustellenden Semantik soll überhaupt nicht mehr von Possibilia die Rede sein. Die Quantoren laufen ausschließlich über die existierenden Gegenstände. Als entsprechende Regel könnten wir festlegen: $\vdash\!\!\!-\forall x\, E(x)$

Alles, was es gibt, existiert. Tatsächlich können wir darauf als Grundregel verzichten. Ich nehme aber an, dass das Universum nicht leer ist. Es gibt irgendetwas:[2] R12. $\vdash\!\!\!-\exists x\, E(x)$

Durch singuläre Terme, die nicht auf existierende Gegenstände referieren, verlieren bekanntlich einige Thesen der klassischen Prädikatenlogik ihre Gültigkeit: (8) $\forall x\, F(x) \supset F(a)$

wird falsch, wenn "a" ein singulärer Term ist, der nicht für einen existierenden Gegenstand steht. "$\forall x$" bezieht sich nämlich nur auf die existenten Gegenstände. Wenn nun allen existenten Gegenständen etwas zukommt, muss es noch lange nicht a zukommen. Dasselbe Problemm ergibt sich bei der existentiellen Generalisierung. Die Universelle Spezialisierung muss also ebenso wie die existentielle Generalisierung auf existente Gegenstände bezogen werden. Als Regeln für die Quantoren (vgl. Essler/Martinez 1991: 193) ergeben sich:

R13. $\forall x\, P(x), E(á) \rightarrow P(á)$ wobei $<P(x),x,á,P(á)>$ ($\forall$B)

R14. $P(á) \rightarrow \forall x\, P(x)$
wobei $<P(á),á,x,P(x)>$ & $<P(x),x,á,P(á)>$ ($\forall$E)

R15. $P(á), E(á) \rightarrow \exists x\, P(x)$ wobei $<P(x),x,á,P(á)>$ ($\exists$E)

R16. $\exists x\, P(x) \rightarrow P(á) \wedge E(á)$
wobei $<P(á),á,x,P(x)>$ & $<P(x),x,á,P(á)>$ ($\exists$B)

"$<P(á),á,x,P(x)>$" stehe für den Umstand, dass an jeder Stelle, an der á in P(á) vorkommt, x in P(x) vorkommt und x dadurch nicht gebunden wird (vgl. Essler/Martinez 1991: 180ff.). Gemäß der freien Semantik, die zwischen inner und outer domain unterscheidet, sind die gewöhnlichen Quantorenregeln um Existenzannahmen zu ergänzen. Da bei der existentiellen Generalisierung darauf geschlossen werden soll, dass etwas Existentes in P ist, müssen wir auch annehmen, dass das Bestimmte in P, das wir annehmen, auch existiert. Da wir bei der Universellen Spezialisierung von einer Annahme ausgehen, die für alles Existente

---

2) Manche freien Logiken machen sich auch von der Annahme, dass es überhaupt etwas gibt, frei (vgl. Lambert 1991b). Die Nummerierung der Regeln und die metasprachlichen Symbole bezieht sich auf den später ausführlich dargestellten Kalkül; s.u. §4.

gilt, können wir auch nur auf einen Einzelfall, den wir aus der Menge des Existenten nehmen, schließen. Da wir bei der existentiellen Spezialisierung davon ausgehen, dass etwas Existentes in P ist, müssen wir bei dem Gegenstand, den wir als dies P ansehen wollen, auch annehmen, dass er existiert. Bei der universellen Generalisierung schließen wir auf den allgemeinen Fall; allerdings schließen wir hier nur auf den allgemeinen Fall bezüglich der existenten Gegenstände, über die Allgemeinheit der möglichen Gegenstände müssen wir hier nichts sagen. Die (UG) ist hier somit - relativ zu einer Semantik mit einem einheitlichen Universum möglicher Gegenstände - restringiert. Im übrigen sind bei UG und ES einschränkende Bedingungen zu beachten (vgl. Essler/Martinez 1991: 194), die als Bedingungen an den Aufbau einer Ableitung hinzugefügt werden müssen. Wird á in einer Zeile z.B. universell generalisiert, in der ansonsten als singulärer Term nur é vorkommt, so sagen wir, dass á von é "abhängt" und notieren dies als "á(é)" rechts am Zeilenrand der Zeile, die durch die universelle Generalisierung entsteht. Von allen nichtgebundenen Individuenausdrücken einer wff sagen wir, dass sie in dieser wff "frei" vorkommen. Als weitere Bedingungen für Ableitungen (vgl. (i) – (iv) in §4) gelten dann:

(v) Der generalisierte Term in R14. sowie der spezialisierte Term in R16., außer bei der Spezialisierung von "∃x E(x)", die auf einen neuen singulären Term erfolgen muss, sind rechts neben der durch diese Regeln gebildeten Zeile durch Anführung zu markieren. Ebenfalls zu markieren ist, von welchen singulären Termen dieser Term abhängt.

(vi) Kein Ausdruck darf mehrfach markiert werden.

(vii) Falls in einer Ableitung eine Markierung á(é) auftritt, darf é nicht als von á abhängig markiert sein.

(viii) Ausdrücke, auf die existentiell spezialisiert oder von denen aus universell generalisiert wird, dürfen weder in der Konklusion noch in den Annahmen, von denen diese abhängt, außer in einer Existenzannahme, frei vorkommen.

Identität läßt sich in prädikatenlogisches Natürliches Schließen durch Regeln der Identitätseinführung und -beseitigung aufnehmen (vgl. Essler/Brendel 1993:42f.). Die Regel der Identitätseinführung (=E) besagt:

R17. |-(a=a)

Dies gilt in unserer freien Semantik auch für solche Individuenkonstanten, der keinen existierenden Gegenstand benennen:

(9) Pegasus=Pegasus.

Während die Identitätseinführung unproblematisch ist, können wir die übliche Identitätsbeseitigung, die von Identischem verlangt (also bezüglich beliebiger singulärer Terme), dass es alle Eigenschaften teilt,

*(10) á=é, P(á) → P(é)

nicht übernehmen[3], da der Kalkül auch Kennzeichnungen enthalten soll. Kennzeichnungen können ja in verschiedenen möglichen Welten für verschiedene Gegenstände stehen. Aus *(10) als Grundregel könnten wir, indem wir als Prädikator " a=()" nehmen, mittels (DT) zu folgender Aussage kommen:

*(11) a=ιxF(x) ⊃ (a=a ≡ a=ιxF(x))

Diese Aussage ist nun jedoch nicht gültig. In einer Welt w_i mag das Antecedenz wahr sein (etwa Erwin ist der Oberbürgermeister von Düsseldorf), obwohl es deshalb noch lange nicht in allen möglichen Welten wahr ist (Erwin hätte die letzte Wahl verlieren können, so dass Erwin zwar notwendig mit Erwin identisch ist, doch nicht notwendigerweise mit dem Oberbürgermeister von Düsseldorf). Es gilt also nicht für beliebige singuläre Terme

*(12) á=é ⊃ (á=é)

Dies gilt nicht für Kennzeichnungen. So wurde R17. für Individuen*konstanten* formuliert. Die Koextensivität mit einer definiten Kennzeichnung muss von der Identität als einer notwendig bestehenden Relation unterschieden werden. Die Austauschbarkeit eines singulären Terms durch eine Kennzeichnung (d.h. einen bloß koextensiven Term) muss also auf bestimmte Kontexte restringiert werden.

In S5 ist jeweils nur die am weitesten rechts stehende Modalität relevant. Alle S5-Aussagen lassen sich auf den Modalgrad 1 reduzieren (vgl. Hughes/Cresswell 1990:51-54). Die Beschränkung von (=B) muss also anders formuliert werden, wobei á eine Individuenkonstante sei:

R18. á=é, P(á) → P(é) wobei im Falle, dass é eine Kennzeichnung ist, é in P'(), das die Reduktion von P() auf den Modalgrad 1 ist, nicht im Skopus eines Modaloperators steht.

---

3) Aussagen, die in den betrachteten Systemen nicht ableitbar oder nicht gültig sind, werden mit einem "*" gekennzeichnet.

Für eine Kennzeichnung "das F" wird in der freien Semantik nur verlangt, dass *wenn* ein existierender Gegenstand mit dem F identisch ist, es dann genau ein Gegenstand ist. Die kontextuelle Einführung von Kennzeichnungstermen in Identitätsaussagen beschränkt sich also auf die Einzigkeitsbedingung. Russells Existenzbedingung wird fallengelassen. Als Regel heißt dies (vgl. Lambert 1991c):

R19. $\iota xP(x)=á \leftrightarrow (\forall y)(á=y \equiv P(y)\wedge(\forall z)(P(z)\supset z=y))$

Wenn etwas mit dem P identisch ist, dann gilt für alle existierenden Gegenstände, dass sie mit diesem Gegenstand genau dann identisch sind, wenn sie P sind und alle Gegenstände, die sonst noch P() erfüllen, mit ihnen identisch sind, es also *nur ein* P gibt. (Diese Regel bzw. das entsprechende Axiom nennt man auch "minimal free description theory" (MFD).) Kennzeichungen lassen sich also durch die „←“ Richtung von (R19) einführen. Aus beliebigen Kontexten „G(ιxF(x))“ lassen sie sich eliminieren durch das Theorem (aus (=B)):

(T1) $G(\iota xF(x)) \supset (a = \iota xF(x) \supset G(a))$

Der Kennzeichnungsterm selbst bringt keine Existenzannahme mit sich. Dass besagt das folgende Theorem, das auf die hinzukommende Existenzannahme verweist: (T2) $E(a) \wedge a=\iota xG(x) \supset \exists x\, G(x)$

§3 Ein semantisches Modell

Ein Modell für den Kalkül hier ist ein Triple <W,D,I>, wobei D, das Universum der Individuen ist, auf die sich die Individuenausdrücke beziehen. Bezüglich eines Weltindexes w_i sagen wir auch w_i|—α (in wi ist α ableitbar, s.u.) bzw. w_i |= α (wi ist ein Modell für α).

Die Semantik soll hier eine Erweiterung der möglichen Welten Semantik eines *linguistic ersatzism* der Zustandsbeschreibungen. Wir gehen von einer Sprache L^i aus: Die Sprache L^i hat endlich viele basale singuläre Terme (Namen aber auch definite Kennzeichnungen und dann evtl. auch Verfahren, singuläre Terme zu bilden, wie die Anführungsfunktion). Die Anzahl der singulären Terme sei n. Außerdem hat L_i m atomare generelle Terme (im Gegensatz zu Aussagefunktionen wie "( )läuft oder Horts hustet" als komplexen generellen Termen). Wenn wir nun die m atomaren generellen Terme auf die singulären Terme anwenden, erhalten wir n•m atomare Aussagen. Bewerten wir nun jede

dieser Aussagen als wahr oder falsch.[4] Es ergeben sich maximal relativ zu den beiden Wahrheitswerten "wahr" und "falsch" höchstens $2^{n \bullet m}$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten. Jede dieser Möglichkeiten geben wir durch die Menge der Aussagen an, die in ihr als "wahr" bewertet wurden. Diese Aussagen ergeben den in dieser Möglichkeit beschriebenen atomaren Weltzustand, als Gesamtheit atomarer Tatsachen. Entsprechend den gleich darzulegenden semantischen Regeln von L^i ergänzen wir nun diese Aussagen um in L^i bildbaren Aussagen, die mit ihnen eine semantisch konsistente Aussagenmenge bilden. Auch wenn wir nicht in endlicher Zeit feststellen können, ob ein solcher Widerspruch besteht (insbesondere aufgrund der Nichtentscheidbarkeit der prädikatenlogischen Konsistenz), so geht es hier um sein *Vorliegen gemäß den Regeln* von L^i. Die maximal konsistente Menge muss es *geben*, auch wenn wir sie nicht effektiv aufschreiben können. Bezüglich jeder L^i-bildbaren Aussage α fügten wir also $\neg\alpha$ oder α hinzu (bzw. im Falle, dass beide hinzufügbar sind, fügten wir [als Konvention *dieses* Verfahrens] $\neg\alpha$ hinzu), so dass sich eine maximale Menge von L^i-Aussagen ergibt; analog zu Lindenbaums Lemma für Theorien 1.ter Stufe (vgl. Hunter 1996: 177).

Eine solche Menge nennen wir eine "mögliche Welt". W sei die Menge der möglichen Welten in einem Modell. Ein einzelnes Modell muss sich nicht auf alle möglichen Welten beziehen. Zustandsbeschreibungen, die nur atomare Aussagen enthalten, ergänzen wir durch Regeln, die sich auf Aussagenbewertungen beziehen, um zu den möglichen Welten zu gelangen.

(W1) Man nehme $\neg\alpha$ in w auf ($\neg\alpha \in w$), wenn nicht $\alpha \in w$.

(W2) Man nehme $(\alpha \vee \beta)$ in w auf, wenn $\alpha \in w$ oder $\beta \in w$.

(W3) Man nehme α in w auf, wenn $(\forall w \in W)(\alpha \in w)$.

Diese Regeln setzen ein schrittweise Vorgehen (je nach Anzahl der in einer Formel vorkommenden logischen Ausdrücke) voraus. Die eine Seite der Regeln bezieht sich jeweils darauf, was gemäß dem Konstruktionsstand in w der Fall ist. Alle anderen Junktoren- oder Operatorenregeln lassen sich auf diese zurückführen. Die möglichen Welten beschreiben also, was gemäß den semantischen Regeln von Li anders sein könnte. In dieser S5-Sprache bedarf es keiner besonderen

4) Falls die atomaren generellen Terme wechselseitig definiert wurden, sind dabei die durch solche Bedeutungspostulate geschaffenen Restriktionen einer konsistenten Bewertung zu berücksichtigen.

Zugänglichkeitsrelation R, da jede Welt von jeder anderen aus zugänglich ist; deshalb muss ein Modell kein Quadrupel <W,I,D,R> sein. I umfasst als eine Komponente die Regeln zur Konstruktion möglicher Welten. Das sind die (W*)-Regeln. Die üblichen Bewertungsregeln korrespondieren diesen Aufbauregeln. Da wir mittels der Definitionen der anderen Operatoren und Junktoren nur "¬", "∨" und " "[5] betrachten müssen, beschränken wir uns auf folgende Grundregeln:

(I¬) Für alle w∈ *W*: I(¬α,w)=1 genau dann, wenn I(α,w)=0.

(I∨) Für alle w∈ *W*: I(α∨γ,w)=1 gdw. I(α,w)=1 oder I(γ,w)=1, anderfalls 0.

(I) I(α,wi)=1 gdw. für alle wj∈ *W*: I(α,wj)=1.

Da die möglichen Welten die Ergänzungen der Zustandsbeschreibungen zu maximalen Mengen sind, spiegelt die Mitgliedschaft in einer möglichen Welt *nur* das Befolgen der semantischen Regeln wieder. Wir können die Bewertungsregeln daher in eine einzige zusammenfassen: Für eine beliebige Aussage α können wir festhalten:

(I) I(α,w)=1 gdw. α∈ w.

Die Modelle unterscheiden sich dadurch, wie sie Konstanten interpretieren. Dies zeigt sich darin, welche der konstruierbaren möglichen Welten in der Menge W eines Modells sind. So kann ein Modell, um etwa die Interpretation von "F()" in einer bestimmten Weise festzulegen, allein solche Welten in W aufnehmen, die sich bezüglich der Extension von "F()" kaum unterscheiden, aber in anderen Hinsichten variieren. Bei der Identitätsrelation fordern wir

(W4) In allen Zustandsbeschreibungen befindet sich bezüglich aller Individuenkonstanten á die Aussage á=á.

(W5) In dem Fall, dass sich bezüglich zweier Individuenkonstanten á und é die Aussage á=é in einer Welt der Menge W_i eines Modelles M_i befindet, befindet sich diese Identitätsaussage in *jeder* Menge w∈ W_i.

Dies restringiert die Auswahl der Welten für die Menge W_i eines Modells aus der Menge der überhaupt konstruierbaren möglichen Welten.

(W6) Befinden sich in einer Welt wi die Aussagen á=é und P(á), wobei á eine Individuenkonstante ist, so ist die Aussage P(é) aufzunehmen, wobei im Falle, dass é eine Kennzeichnung ist, é in P'(), das die

---

5) Aus Gründen der Einfachheit bietet sich eine Regel für " " an, wobei bei Zugrundelegung von " " das Enthaltensein zu definieren wäre: α⇒γ:= (α⊃γ); s.u. §4 zum „⇒“ als basalem Junktor.

Reduktion von P() auf den Modalgrad 1 ist, nicht im Skopus eines Modaloperators steht.

Diese Forderungen spiegeln die obige Konzeption der starre Designation und damit notwendigen Identität wieder. *Die möglichen Welten konstruieren wir passend zu unseren semantischen Annahmen.*

Innerhalb eines Modells ist die Identität also eine notwendige Relation und eine Aussage der Form á=á notwendig. Verschiedene Modelle unterscheiden sich indessen in den Identitätsaussagen, die in ihren möglichen Welten vorkommen. Ansonsten wären Identitätsaussagen zugleich logisch wahr! Als Regel für die Aufnahme von quantifizierenden Aussagen in die Erweiterungen der Zustandsbeschreibungen nehmen wir auf:

(W7) Man nehme $(\exists x)P(x)$ in w auf, wenn es eine Individuenkonstante á gibt, so dass $E(á)\in w$ und $P(á)\in w$.

Diese Regel entspricht der existentiellen Generalisierung. Sie bezieht sich *nicht* auf eine Belegung von Variablen, sondern auf das Vorkommen von singulären *Termen*. Es bedarf daneben *keiner* Interpretationsfunktion bezüglich der Variablen. Die Aufbauregeln bezüglich der möglichen Welten verschaffen schon den quantifizierten Aussagen Wahrheitswerte.

Mittels (W7) und (W1) für die Negation läßt sich der Allquantor handhaben. Bei (W7) sehen wir die spezifischen Annahmen der existentiellen Generalisierung in einer freien Logik: Es wird gefordert, dass der Existenzprädikator auf á angewendet wurde. Da der Existenzprädikator zu den generellen Termen gehört, unterscheiden sich die gebildeten Zustandsbeschreibungen auch dadurch, auf welche Individuenkonstante in ihnen der Existenzprädikator angewendet wird, d.h. dadurch, *welche singulären Existenzaussagen sie enthalten*. Jede Zustandsbeschreibung soll mindestens eine Existenzaussage enthalten: Irgendetwas soll es geben. Bezüglich der Menge der möglichen Welten bildet die – gleich zu klärende – Extension von E( ) in einer Welt w_i ("an einem Weltindex") die inner domain D^i von w_i. Es gilt also immer:

(IE) $I(E(),w_i)=D^i$

$\forall xE(x)$ ist trivialerweise wahr, da sich der Quantor nur auf D^i bezieht.

Die Extension eines generellen Terms in w^i ist eine Teilmenge von D, nicht unbedingt nur von D_i. Das ergibt sich aus der Konstruktion der Zustandsbeschreibungen. Es muss ein genereller Term also nicht allein auf

in wi existierende Gegenstände zutreffen - so kann Peter ja an ein Einhorn denken (also die Relation "(x)denkt-an(das Einhorn)" erfüllen).
Bei der Konstruktion der möglichen Welten müssen wir jetzt noch den Umstand berücksichtigen, dass unsere Sprache Kennzeichnungsterme enthält. Wir müssen daher zwei weitere Bedingungen für Zustandsbeschreibungen bzw. mögliche Welten aufstellen. Die erste betrifft die Aufnahme von Ausdrücken mit dem ι-Operator in mögliche Welten

(W8) Im Falle, dass sich in einer möglichen Welt wi die Aussage $(\forall y)(á=y \equiv P(y)\wedge(\forall z)(P(z)\supset z=y))$ befindet, nehme $á=\iota xP(x)$ in w_i auf.

Die zweite betrifft das Identifizieren eines *Ersatzreferenten* für fehlschlagende, also nicht vereinzelnde, Kennzeichnungen. Im Falle, dass (W8) nicht zu einer Identitätsaussage bezüglich ιxP(x) führt, gelte:

(W9) Für jeden nicht vereinzelnden Kennzeichnungsterm $\iota x\alpha$ nehme man eine Identitätsaussage $\iota x\alpha=é$ bezüglich einer Individuenkonstante $é \notin D_i$ in wi auf.

Dabei können sich die Identitäten von Zustandsbeschreibung zu Zustandsbeschreibung ändern, da Kennzeichnungen keine starre Designatoren sind. Da wir auch Kennzeichnungsterme für „unmögliche Gegenstände“ bilden können, benötigen wir in D auch mindestens einen Namen, für den wir die Identität mit einer solchen Kennzeichnung behaupten. Für eine Kennzeichung ιxP(x), die nicht die Vereinzelungsbedingung erfüllt, wird die Identität mit irgendeinem nichtexistenten Gegenstand behauptet. Es gibt aber nicht (wie in Carnap (1956)) ein bestimmtes "Ersatzobjekt" wie die leere Menge, das mittels einer besonderen Regel für "improper descriptions" (vgl. Montague/Kalish 1957: 67) einer solchen Kennzeichnung zugewiesen wird. (W9) ist allerdings eine Regel für "improper descriptions".

Für Aussagen in w_i, die Kennzeichnungen enthalten, nehmen wir an, dass *vor ihrer Bewertung* der Kennzeichnungsterm durch den singulären Term ersetzt wird, bezüglich dessen sich eine Identitätsaussage in wi befindet. Dies ist nötig, da sich in D keine Kennzeichnungen befinden. Nach (W8) und (W9) ist es auch immer möglich.

(G) Eine wwf α ist NDFS5-gültig genau dann, wenn in allen NDFS5-Modellen für alle $w \in W$: $I(\alpha,w)=1$.

Was sagt uns diese Semantik nun zur Ausgangsfrage nach den Possibilia?

Es bietet sich folgende Überlegung an: Ob ein Gegenstand in einer möglichen Welt existiert, überprüfen wir nicht, indem wir uns auf die Reise nach irgendwohin begeben oder Annahmen über Possibilia machen, sondern indem wir eine Aussagenmenge (denn das sind ja möglichen Welten) daraufhin überprüfen, ob sie eine entsprechende Existenzaussage enthält. Dass Universum unserer prädikatenlogischen Sprache (die outer domain, die die jeweiligen inner domains einschließt) können *wir als Menge von abzählbar vielen Namen* auffassen. Die Individuenkonstanten stehen also für sich selbst oder auch für andere Namen, und auf sie beziehen sich die Variablen. Über anderes als Beschreibungen wird - zunächst, wie wir sehen werden - nicht geredet. Also auch nicht über Possibilia. Die Bewertungsfunktion ordnet jedem singulären Term einen Referenten aus D zu. Solche Namen in D werden wir im Gegensatz zu Possibilia ontologisch ungefährlich finden, zumal wir sie als physikalisch realisierte Ausdrucksvorkommnisse oder Anweisungen zur Anfertigung solcher Vorkommnisse auffassen können. Die Extensionen betreffen also zunächst nur *Namen*. Die entscheidende Überlegung ist die folgende: *Man interpretiere nun den Umstand, dass ein singulärer Term in der aktualen Welt in der Extension von E() ist als den Umstand, dass der Term in der Raum-Zeit instantiiert ist.* Die Aussagen, die diesen Term enthalten, betreffen einen instantiierten Term, d.h. *sie betreffen einen Gegenstand*. (So definiere ich "instantiieren".) Welche Welt ist aber die aktuale? Außerdem haben wir scheinbar folgendes Problem: Reden die Individuenausdrücke über Beschreibungen (also sprachliche Ausdrücke), dann wird eine Aussage, die "Peter läuft" formalisiert relativ zur Wirklichkeit falsch sein, da mit dem singulären Term über einen Ausdruck (eben nicht die Person Peter) geredet würde, und Ausdrücke laufen nicht. Die Aussagen wiederum, die relativ zur Wirklichkeit wahr wären, hätten – von unserer gegenstandsorientierten Rede aus betrachtet, merkwürdige – Gehalte wie "Peter ist ein Name". Diese Fehlpassung müssen wir korrigieren, indem wir neu festlegen, welche der möglichen Welten wir als die aktuale Welt betrachten wollen. Dazu benutzen wir den Umstand, dass der Kalkül (im folgenden „NDFS5“ für „Natural Deductive Functional S5“) eine Erweiterung der nicht-modalen Prädikatenlogik ist. Das heißt: Die Menge der NDFS5-Aussagen enthält als Teilmenge eine Menge von Aussagen, die die Aussagenmenge einer Prädikatenlogik bildet (im nicht-modalen

Bereich ist NDFS5 homophon (verwendet dieselben Ausdrücke) wie diese Prädikatenlogik). Wir legen nun fest:
Die aktuale Welt ist diejenige mögliche Welt, deren atomare Aussagen wahr sind, *weil* die Gegenstände der Wirklichkeit, die durch Namen benannt sind, die sich zu den Individuenausdrücken der aktualen Welt *homophon* verhalten, genau die Eigenschaften haben, die durch generelle Terme benannt werden, die sich zu den generellen Termen der aktualen Welt homophon verhalten. D.h. die aktuale Welt ist in ihren atomaren Aussagen homophon zu einer wahren Beschreibung der Wirklichkeit, *deren Ausdrücke über die Gegenstände und Eigenschaften der Wirklichkeit interpretiert sind.* Die Berufung auf eine solche Homophonie ist - wie gesagt - möglich, da die modale Sprache eine Sprache der Prädikatenlogik der 1.ten Stufe nur um die Modalausdrücke ergänzt. In der nicht modalen Rede ist sie völlig homophon (also in den atomaren Zustandsbeschreibungen). Diese nicht-modale Rede läßt sich nun wie die homophone, über die Wirklichkeit interpretierte Sprache auffassen. Die aktuale Welt geht auf eine Zustandsbeschreibung zurück, die genau die atomaren Aussagen wahr macht, die in einer diesbezüglich homophonen Sprache der Prädikatenlogik 1.ter Stufe in Bezug auf die Wirklichkeit wahr *sind*. Diese indirekte Kausalanbindung an die Wirklichkeit fehlt allen nicht-aktualen Welten. Sie liegt der vorgeschlagenen interpretatorischen Hintergrundannahmen zugrunde. Dieses Vorgehen erlaubt uns, die Aussagen der aktualen Welt *relativ zur Wirklichkeit referentiell zu verstehen*, da eine eindeutige Zuordnung zu einer homophonen wahren Beschreibung der Wirklichkeit vorliegt, *und zugleich*, die modale Rede als das *Beschreiben* von anderen Zuständen und Verhaltensweisen der Wirklichkeit zu verstehen, ohne dass wir uns damit auf eine Ontologie der Possibilia einlassen. Aussagen über Terme, die in der aktualen Welt instantiiert sind, interpretieren wir als Aussagen über Gegenstände der Wirklichkeit. Alle anderen Aussagen betreffen nur Beschreibungen (Namen und Kennzeichnungen) - z.B., dass Peter an ein Einhorn denkt, bezieht Peter auf eine Repräsentation, nicht auf einen möglichen Gegenstand Einhorn. *Diese Interpretation ist eine Hintergrundannahme unserer Semantik konstruierbarer möglicher Welten als Aussagenmengen*.
Das Verfahren mag manchem etwas gekünstelt erscheinen. Das erwähnte „Interpretieren“ ist auch keine Interpretationsfunktion im vorherigen Sinne, sondern vielmehr eine Kombination aus (a) unserem Wissen über

das Vorhandensein einer entsprechenden homophonen nichtmodalen Zustandsbeschreibung und (b) einem aus Possibilia-Abneigung bedingten Umschalten bzw. Hinzuziehen einer entsprechenden referentiellen Interpretation dieser nichtmodalen Aussagen, während wir alle Possibilia-Terme weiterhin referentiell auf das (Pseudo-Herbrand)-Universum bloßer Repräsentation beziehen. Das hört sich nach viel gekünstelten bösen Willen an - doch was wäre mehr gekünstelt als ein Universum von Possibilia? Hier können wir neben dem Vermeiden von Possibilia zwei Dinge erreichen:

1. Bezüglich des Existenten ist eine modale Rede möglich.
2. Nicht-referentielle Prädikatoren (d.h. generelle Terme, die auch nicht als existent Beschriebenes zulassen (wie "(a)denkt-an( )'")) bekommen ein Relatum zugewiesen, dass intuitiv plausibel erscheint: Wenn Peter an das Einhorn denkt, steht er zumindest in einer Relation (etwa des Habens oder Vollziehens) zu einer Repräsentation. Diese Beziehung mag (vermittels der Repräsentation als mentalem Ereignis etwa) kausal wirksam sein. Possibilia könnten dies nicht leisten.

Trotz der quasi-substitutionellen Rede bezüglich des Universums D, stellt diese interpretatorische Hintergrundannahme also eine Verbindung her zu unserem Interesse, über die Gegenstände und Eigenschaften der Wirklichkeit zu reden.[6] Schließlich sind diese es, weswegen überhaupt irgendwelche Aussagen wahr oder falsch sind.

„E()“ hat Extensionen relativ zu Welten. Verschiedene Welten beschreiben unter Umständen verschiedene Terme als instantiiert. Die inner domain einer möglichen Welt ist die Extension von „E()“ in dieser Welt, d.h. eine Menge von Namen. Ausschließlich bezüglich der aktualen Welt nehmen wir die Rede von der "Instantiierung" wörtlich. Als Realisten wissen wir, dass es nur eine aktuale Welt gibt, da es nur eine Wirklichkeit gibt. Und

---

6) Die Auffassung der Quantifikation ist hier "quasi-substitutionell", da obwohl die Wahrheit einer Aussage auf ihr Enthaltensein in nach bestimmten (W)-Regeln zustandegekommenen Zustandsbeschreibungen bezogen wird, referentiell über das Universum der Namen geredet wird, um so die gewöhnliche quantifizierende Rede und damit die Parallele zu den üblichen Interpretationsregeln (I-Regeln) beizubehalten. Eine rein substitutionelle Interpretation würde zugunsten der möglichen Welten ganz auf den Bereich D verzichten. Dies bringt allerdings Schwierigkeiten (etwa für die strenge Vollständigkeit) mit sich (vgl. Carnap 1938: Anm.8), neben den in §1 erwähnten. Die Kardinalität von D ist nun auch begrenzt. Aber wir müssen hier nicht über überabzählbare Bereiche wie die reellen Zahlen reden. Das Problem von Possibilia würde sich scharf nur bei der Unverzichtbarkeit einer modalen Rede über überabzählbare Bereiche stellen

den instantiierten singulären Termen dieser aktualen Welt entsprechen Gegenstände der Wirklichkeit. Andere Gegenstände gibt es nicht. Welche Gegenstände es geben könnte, wird in den möglichen Welten *beschrieben.* Dieses Beschreiben bringt aber keine Gegenstände hervor. Auch wenn in diesen Welten beschrieben wird, wie in einer solchen Welt quantifiziert wird, nämlich über die Gegenstände, die es laut dieser Beschreibung geben würde, so quantifizieren alle Welten doch nur über ihre inner domain. Und da *nur eine* der möglichen Welten, die ja Aussagenmengen sind - also in lange Konjunktionen überführt werden könnten -, wahr ist, nämlich die aktuale Welt, wird zu Recht daher nur über einen dieser Individuenbereiche quantifiziert, nämlich über den, welcher der Wirklichkeit entspricht. Wenn also von weltrelativen Universen die Rede ist und wir gemäß unserer interpretatorischen Hintergrundannahme über Gegenstände in Raum und Zeit reden – oder das, was in Raum und Zeit der Fall sein könnte –, so halten wir doch als Rückzugsposition fest, dass wir diese Rede auf eine Rede über Beschreibungen zurückführen könnten (vgl. auch Meyer/Lambert 1968).

§4 Ein adäquater Kalkül (NDFS5)

NDFS5 besitzt folgendes Alphabet: $\neg$ (einstelliger Operator)
$\vee$, $\Rightarrow$ (zweistellige Operatoren) (,)(Klammern)
endlich viele basale Individuenkonstanten und Variablen:
$a,b,c,a_1,b_1,c_1,a_2 \ldots$ $x,y,z,x_1,y_1,z_1,x_2 \ldots$
Prädikatoren: $F( ),G( ),H( ),F_1( ),G_1( ),H_1( ),F_2( ) \ldots$
den Existenzprädikator: $E( )$
die Identitätsrelation: $( )=( )'$
n-stellige Relationsausdrücke: $R( )( )',R_1( )( )',R( )( )'( )'' \ldots$
die Quantoren: $\forall x$, $\exists x$, den Kennzeichnungsoperator: ι
Die wohlgeformten Formeln werden dann wie üblich definiert, wobei sich der Existenzprädikator wie ein einstelliger Prädikator und die Identität wie eine zweistellige Relation verhält. Prädikatoren und Relationsausdrücke sind generelle Terme, Individuenkonstanten, Kennzeichnungen und Variablen sind singuläre Terme. "α"... dienen hier als metasprachliche Variablen.

(S1) Ist α ein n-stelliger genereller Term und sind $\gamma 1 \ldots \gamma n$ singuläre Terme, dann ist $\alpha(\gamma 1 \ldots \gamma n)$eine Aussageformel, wenn mindestens einer der singulären Terme eine Variable ist, ansonsten ist α eine Aussage. Aussagen und Aussageformeln sind wffs.

(S2) Ist α eine wff, so ist es auch $\neg\alpha$.

(S3) Sind α und γ wffs, so auch $\alpha \vee \gamma$und $\alpha \Rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$" sei das logische Enthaltensein, als der elementare modale Operator.

(S4) Ist α eine Aussage, β eine Variable und γ ein Quantor, so ist $(\gamma\beta)(\alpha)$ eine Aussage. α ist der Skopus des Quantors. Alle Vorkommnisse von β im Skopus eines Quantors sind *gebundene Variablen*, Variablen, die von keinem Quantor gebunden werden, sind *freie* Variablen.

(S5) Ist α eine Aussageformel und sind $\gamma 1 \ldots \gamma n$ die in α frei vorkommenden Variablen und sind $\beta 1 \ldots \beta n$ Quantoren, dann ist $\beta 1 \gamma 1 \ldots \beta n \gamma n \alpha$ eine Aussage.

(S6) Ist α eine Aussageformel in der nur die Variable β frei vorkommt, so ist $(\iota\beta)(\alpha)$ eine Kennzeichnung.

(S7) Nichts sonst ist eine wff oder eine wohlgeformte Kennzeichnung.

Im Falle des Identitätszeichen schreiben wir anstelle von "=(a,b)" "a=b".

Thesen und Annahmen sind allein geschlossene Formeln, da nur diese einen Wahrheitswert besitzen. Die Regel der einheitlichen Einsetzung (R4) wird formuliert:

(R4) In einer These darf uniform ersetzt werden: eine Individuenkonstante durch einen singulären Term, eine Variable durch eine Variable, ein n-stelliger genereller Term außer "E()" und „()=()'“ durch einen n-stelligen generellen Term. (Einheitliche Einsetzung)

Außer der Verwendung von Anführungsnamen soll gelten: "P( )", "Q( )( )'" sind metasprachlicher Ausdrücke für generelle Terme. "á", "é" sind metasprachliche Ausdrücke für singuläre Terme. Die Quantoren und Variablen sowie der Existentprädikator und die Identität werden, wo keine Verwirrung entstehen kann, als metasprachliche Zeichen für sich selbst verwendet. Insofern wir hier das Natürliche Schließen nicht als Weise der symmetrischen Einführung und Beseitigung von Operatoren betrachten, definieren wir einige der Operatoren im Rückgriff auf die elementaren Operatoren:

(D$\wedge$) $\alpha \wedge \beta := \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (D$\supset$) $\alpha \supset \beta := \neg\alpha \vee \beta$

(D≡) $\alpha \equiv \beta := (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$

In NDPS5 liegt eine *Ableitung* von β aus $\alpha_1 ... \alpha_n$ genau dann vor, wenn es eine endliche Sequenz von wohlgeformten Formeln $\beta_1 ... \beta_m$ gibt, so dass $m \geq n$, β ist β_m, und für $1 \leq i \leq m$ entweder

(i) β_i ist eine Annahme oder (ii) β_i ist eine These oder

(iii) β_i ergibt sich aus einer NDPS5-Regelanwendung aus mindestens einer vorausgehenden Formel β_j.

Die *Zeilen* einer Ableitung ergänzen die Formeln in der Formelsequenz dadurch, dass

(i) links von jeder Formel die Zeilen durchnummeriert werden.

(ii) hinter der Zeilennummer in eckigen Klammern die Zeilennummern der Annahmen vermerkt werden, von denen die betreffende Zeile abhängt.

(iii) rechts von der Formel angegeben wird durch welche Regel, angewendet auf welche Formeln (repräsentiert durch ihre Zeilennummern) die Forme gewonnen wurde; eine schwarze Box signalisiert das Ableitungsende.

(iv) wurde durch die Anwendung der Konditionalisierung (s.u.) eine Annahme von einer Ableitungsprämisse ("Schlußprämisse") zum Antecedenz eines Konditionals ("Satzprämisse") gemacht, so wird ab dieser Zeile i die Zeilennummer j dieser Annahme nicht mehr in der Menge der Annahmen, von denen i abhängt, aufgeführt; ebenso bei den Zeilen, die von i anhängen; rechts wird die Nummer der Zeile j unterstrichen, um die Entlastung zur Satzprämisse zu verdeutlichen.

Eine wohlgeformte Formel α ist eine *These*, wenn sie in einer Ableitung vorkommen kann, ohne dass sie von Annahmeformeln abhängig ist (dargestellt als: $\vdash\!\!\!-\alpha$) .

Die Regeln und Definitionen werden hier als metasprachliche Schemata eingeführt, d.h. jedes Regelschema, etwa R1, steht für eine unendliche Menge von Regeln, die alle die Form R1 besitzen, sich aber darin unterscheiden, welche wff an die Stellen von "α" und "β" treten. "α", "β" usw. sind metasprachliche Schemata für Aussagen, "$\rightarrow$" steht für die metasprachlich festgestellte Folgerungsbeziehung, zwischen einer Prämissenmenge, deren Elemente durch Kommas getrennt werden, und einer Konklusion. "$\vdash\!\!\!-\alpha$" besagt, dass α eine *These* ist; darauf ist bei der Anwendung von Regeln zu achten. "E" steht jeweils für "Einführung" eines Operators, "B" für "Beseitigung. Die Grundregeln des aussagenlogischen Teils (vgl. den Kalkül **F** in Canty 1964) sind:

R1. $\alpha,\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ $\wedge$E (Konjunktionseinführung)

R2. $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$ DN`(Doppelte Negation)

R3. $\alpha, \alpha \supset \beta \rightarrow \beta$ $\supset$B (Konditionalbeseitigung, Modus Ponens)

R5. $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \beta$ $\Rightarrow$B (strikte Abtrennung)

R6. $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha \rightarrow \alpha \Rightarrow \beta$ $\Rightarrow$W (striktes Wendegesetz)

R7. $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \gamma \wedge \beta$ F (Faktorisierung)

R8. $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$ SS (strikter Syllogismus)

R9. a) Wenn $\alpha_1,...,\alpha_n \rightarrow \beta$, dann $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n \Rightarrow \beta$

b) Wenn $\alpha_1,...,\alpha_n \rightarrow \beta$, dann $\alpha_1 \wedge \alpha_2 ... \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$ (strikte KD)

Hinzukommt die Regel (R4), die Quantifikationsregeln aus §2 sowie für S5-Modalitäten:

R10. $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \neg(\alpha \Rightarrow \neg\alpha))$

R10. („S5´“) entspricht dem S5-Axiom. Weitere Definitionen:

(D$\Leftrightarrow$) $\alpha \Leftrightarrow \beta := (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

(D$\Diamond$) $\Diamond\alpha := \neg(\alpha \Rightarrow \neg\alpha)$ (D) $\alpha := \neg\Diamond\neg\alpha$

NDFS5 nimmt also den Begriff des *Enthaltenseins* als elementar und definiert davon ausgehend die anderen Modaloperatoren. Auch das strikte Konditionalisieren führt hier das *Enthaltensein,* nicht das Konditional, ein. Sowohl die Necessitation ($\vdash\!\!\!-\alpha \rightarrow \vdash\!\!\!- \alpha$) sowie das Äquivalent zum Axiom T des Modalsystems T (" $p \supset p$") sind nur abgeleitete Regeln.

In Canty (1964) wird die deduktive Äquivalenz seines Systems **F** und S4 bewiesen. R4 ist korrekt aufgrund der Bestimmung der Gültigkeit als Wahrheit bei allen Interpretationen und der Gleichwertigkeit einer Anwendung von R4 mit einem Wechsel der Interpretation. Mit R10. wird über das S4-System **F** deduktiv hinausgegangen. Das modallogische Äquivalent von R10. ist das S5-Axiom. Dieses ist natürlich S5-gültig. Bezogen auf den Gültigkeitsbegriff von S5 ist daher NDFS5 **korrekt**.

Allgemein läßt sich bezüglich NDFS5 sagen, dass die Korrektheit und Vollständigkeit schon in den Begriff dessen, was wir überhaupt als mögliche Welt zulassen wollen, eingebaut wurden. Um die **Korrektheit von NDFS5** zu zeigen, genügt es, die Korrektheit der Regeln zu zeigen, durch die **F** erweitert wird.

Die Gültigkeit von R12. ($(\exists x)E(x)$) (und entsprechend AR23. $\forall x$ E(x)) ergibt sich direkt aus den Konstruktionsanweisungen an mögliche Welten (bei R12.) bzw. daraus, dass nur über etwas aus der Extension von "E()" quantifiziert wird (d.h. (W7),(IE)). (US) ist korrekt: Wenn das

Konsequenz falsch ist, ist entweder ∀x P(x) falsch, wenn á existiert, oder ∀x P(x) mag dennoch wahr sein, da es nur für Existentes gilt und es á nicht gibt, doch dann ist E(á) falsch, so dass auch die Bedingung von R13. nicht erfüllt sein können. Analog läßt sich bezüglich der existentiellen Generalisierung (R15.) argumentieren. Bei (UG) sowie (ES) können aufgrund des Vorkommens markierter Ausdrücke nicht einfach ihre Konditionalisierung betrachtet werden, da dies gemäß den Bedingungen an Ableitungen unzulässig ist. Ihre Korrektheit ergibt sich analog dem Fall der Prädikatenlogik 1.Stufe: gemäß dem *Interpretationssatz* gibt es zu jeder Ableitung, in der (UG) und (ES) verwendet wurden (also einer Zeilenfolge, die den Bedingungen des Markierens genügt), eine Interpretation I' bei der die Konklusion wahr ist, wenn die Prämissen es sind (Essler/Martinez 1991: 330ff.); angenommen eine beliebige Interpretation I, welche die Annahmen einer solchen Ableitung wahr macht, ergibt sich aufgrund der *Irrelevanz* der markierten Ausdrücke in einer Ableitung und aufgrund des *Koinzidenzsatzes* (angewendet auf I und I'), dass I auch die Konklusion bewährt. Da I eine *beliebige* Interpretation ist, welche die Annahmen einer solchen Ableitung bewährt, ergibt sich die Gültigkeit (vgl. Essler/Martinez 1991:334). Die Korrektheit von R17. (á=á), R18. und R19. ergibt sich wieder ausdrücklich aus den Konstruktionsanweisungen für mögliche Welten (aus (W4), (W6) und (W8)). Die Korrektheit von R12., R17., R18, und R19. ist insofern trivial, als die Semantik genau dafür entworfen wird, bestimmte Annahmen und Folgerungen zu bewähren - u.a. diese. ■

Um die **Vollständigkeit** zu zeigen, führen wir ein "kanonisches" NDFS5-Modell <W,I,D> ein. Dieses enthält *alle* möglichen Welten in seiner Menge W. Jede Aussage läßt sich aus einer Prämissenmenge herleiten. Diese Prämissenmenge läßt sich entweder zu einer möglichen Welt maximieren (nach §3) oder ist inkonsistent. Eine inkonsistente Prämissenmenge erlaubt (vgl. schon (W1)) keine Erweiterung zu einer möglichen Welt. Gemäß der Definition der Gültigkeit interessieren nur die möglichen Welten bzw., ob eine betreffende Aussage in all diesen enthalten ist. Die Frage der Herleitbatkeit einer Aussage α kann sich deswegen und aufgrund der ableitbaren Regel des *ex falso qoudlibet* auf konsistente Prämissenmenge beschränken. Diese lassen sich jeweils zu einer möglichen Welt erweitern. α ist dann relativ zu dieser Welt als

Prämissenmenge herleitbar: $w_i \vdash\!\!\!- \alpha$. Eine *These* ist unabhängig von der Prämissenmenge herleitbar, da sie keine Prämissen benötigt, so dass gilt:

(M1) $(\forall w \in W)(w \vdash\!\!\!- \alpha) \leftrightarrow \vdash\!\!\!- \alpha$.

Angenommen nun α ließe sich nicht herleiten. Zu zeigen ist, dass α dann auch nicht gültig ist: Wenn α sich nicht herleiten läßt, dann *gibt es* eine Welt w (d.h. ein Element von W im *kanonischen* Modell), so dass nicht $w \vdash\!\!\!- \alpha$. Da aber trivialerweise gilt $\{..., \alpha, ...\} \vdash\!\!\!- \alpha$, kann α nicht Element von w sein. Gültige Aussagen wurden als Aussagen definiert, die in allen Welten enthalten sind. α ist also keine gültige Aussage. Das kanonische Modell mit $w \in W$ ist ein Gegenmodell zu α. ■

Mit der Herleitbarkeit aller logischen Wahrheiten ergibt sich aufgrund der strikten Abtrennung (R5) auch die Vollständigkeit bezüglich der Folgerungen. Man kann auch wie folgt argumentieren: Angenommen für das kanonische Modell gilt: (M2) Für alle $x \in W$, wenn $M,x \models \alpha$, so $\alpha \in x$

Dann ergibt sich mit (M1), was (wegen $\{..., \alpha, ...\} \vdash\!\!\!- \alpha$) auch so formuliert werden kann: (M1') $\vdash\!\!\!- \alpha$ genau dann, wenn für alle $x \in W$, $\alpha \in x$

für das kanonische Modell: (M3) Wenn $M \models \alpha$, dann $\vdash\!\!\!- \alpha$.

Und da es sich bei M um das kanonische Modell handelt (die Gültigkeit von α durch keine "fehlende" Welt in Frage gestellt werden kann), folgt die Vollständigkeit: (M4) Wenn $\models \alpha$, dann $\vdash\!\!\!- \alpha$.

Gezeigt werden muss also (M2). Und (M2) ist das Prinzip (I) aus §2, das trivialerweise aufgrund der Konstruktion der hier verwendeten Semantik gilt.[7]

LITERATUR:

CANTY, JOHN: (1964). "A Natural Deduction System For Modal Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, V (1964), S.199-210.

CARNAP, RUDOLF: (1938). "Foundations of logic and mathematics", *International Encyclopedia of Unified Science*, Vol.1. Chicago.

- (1956). *Meaning and Necessity*. Chicago, erw. Aufl.

ESSLER, WILHELM/BRENDEL, ELKE: (1993). *Grundzüge der Logik*. Bd.II. Klassen, Relationen, Zahlen. Frankfurt a.M., 4.Aufl.

---

7) Es handelt sich hier um meinen zweiten Versuch, einen derartigen Kalkül mit der intendierten Semantik zu verbinden. In einer früheren Publikation zur Modallogik sind mir dabei schwerwiegende Fehler sowohl in der Beweistheorie als auch in der Semantik unterlaufen, die nun – hoffentlich – bereinigt sind. Besonderer Dank für logische Überprüfung gilt Reinhard Bauer und Joachim Bromand.

ESSLER, WILHELM/MARTINEZ, ROSA: (1991). *Grundzüge der Logik*. Bd.I. Das logische Schließen. Frankfurt a.M. 4.Aufl.

HUGHES, G.E./CRESSWELL, M.J.: (1990) *An Introduction To Modal Logic*. London/New York. 7.Aufl.

HUNTER, GEOFFREY: (1996) *An Introduction to Metalogic of Standard First Order Logic*. Berkeley u.a., 6 Aufl.

KRIPKE, SAUL A.: (1963). "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica*, XVI.

KUTSCHERA, FRANZ V.: (1976). *Einführung in die intensionale Semantik*. Berlin/New York.

LAMBERT, KAREL: (1991). (Hg.). *Philosophical Applications of Free Logic*. New York/Oxford.

- (1991b). "The Nature of Free Logic", in: Lambert (1991), S.3-16.
- (1991c). "A Theory of Definite Descriptions", in: Lambert (1991), S.17-27.

MEYER, ROBERT/LAMBERT, KAREL: (1968). "Universally Free Logic and Standard Quantification Theory", *Journal of Symbolic Logic*, 33, S.8-25.

MONTAGUE, RICHARD/KALISH, DONALD: (1957). "Remarks on Descriptions and Natural Deduction", *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 3/4, S.50-73.

OHNISHI, MASAO/MATSUMOTO, KAZUO: (1957) "Gentzen Method in Modal Calculi", *Osaka Mathematical Journal*, 9, S.113-30.

- (1959). "Gentzen Method in Modal Calculi, II", *Osaka Mathematical Journal*, 11, S.115-20.