

Was können wir vom Unendlichen erkennen?

Manuel Bremer

Zum Abschluss der Überlegungen zum Begriff der Unendlichkeit soll noch einmal auf die Epistemologie des Unendlichen eingegangen werden.

Auf der einen Seite könnte man von *jeder* Theorie des Unendlichen Abstand nehmen, insofern sich hier eine Grenze unserer geistigen Vermögen findet. Nimmt man an, dass unseren begrifflichen Möglichkeiten Grenzen gesetzt sind, dann erweitern sich zwangsläufig die möglichen ontischen Bereiche jenseits unserer Zugänglichkeit. Wenn wir keinen klaren Begriff der Unendlichkeit oder der Ewigkeit besitzen, kann es diese hier geben. Mit dem Einräumen solcher unzugänglichen Bereiche scheitert dann auch eine umfassende Theoriebildung. Es bleibt dann nur der Verweis auf einen formbaren negativen Begriff – „un“-Begriff – des Unendlichen, eine Situation, die auch bei anderen Begriffen auftritt (wie dem ‚Unerkennbaren‘), sowie evtl. der Verweis auf eine Idee der reinen praktischen Vernunft oder rationalen Theologie.

Auf der anderen Seite könnte man versuchen, die Bruchstücke einer Theorie der Unendlichkeit zusammen zu setzen:

1. Die Frage nach dem Unendlichen bedarf einiger **begrifflichen Vorklärungen**, u.a. (a) den wichtigen Unterschied zwischen potentieller und aktueller Unendlichkeit und (b) den wichtigen Unterschied zwischen indefiniter Erweiterbarkeit und Unendlichkeit. Der Unterschied (b) erwies sich als schwerer formal und im Modell zu fixieren. Strikter Finitismus bedarf einer Änderung der zugrundeliegenden Logik oder zehrt von einer Metatheorie, in der Unendlichkeit vorkommt. Die Unterscheidung (a) erschien klarer. Es gibt mit dem zeitlichen Progressus eine traditionelle und zunächst recht klare Idee des potentiell Unendlichen. Es ergab sich allerdings die doppelte Frage, ob es sich bei diesem Progressus nicht um eine Form der indefiniten Erweiterbarkeit handelt oder ob nicht jede potentielle Unendlichkeit eine aktuelle Unendlichkeit voraussetzt, in die hinein sich die Serie – für uns – entwickelt.

Halten wir fest: der *prima facie* beste epistemische Zugang zum Unendlichen mag eine Erläuterung des potentiell Unendlichen sein.

2. **Empirisch** lässt sich Unendlichkeit nicht vorführen. Unsere Erfahrungen sind endlich. Und gemäß den gegenwärtig besten kosmologischen Theorien können wir nicht einfach das von uns gesehene Universum (unseres Lichtkegels) mit dem Universum gleichsetzen. Insofern können wir nicht empirisch feststellen, ob das Universum endlich oder unendlich ist (etwa weil die Ausdehnung des Raumes immer ein endliches zugängliches Universum vortäuschen könnte). Insbesondere Theorien des Multiversums legen einen unendlichen Raum und Vorrat an Entitäten zugrunde. Wenn und insofern das Multiversum im Unterschied zu den ‚Blasen‘ der Partikularuniversen einfach da ist, muss seine globale Prozesszeit als eine aktuelle Unendlichkeit einer aktual unendlichen Vergangenheit begriffen werden.

Als Modellbildungen stehen solche Theorien des Multiversums in Kontinuität zur Bildung empirisch überprüfbarer Theorien und *zugleich*, da sie selbst nicht empirisch überprüfbar sind, in Kontinuität – auf der anderen Seite, sozusagen – zur Metaphysik. Halten wir fest: Die Auseinandersetzung um Unendlichkeit ist eine *genuin metaphysische* Frage. Im Zentrum müssen also Überlegungen zur besten Ontologie stehen.

3. Die Modellbildung zur aktuellen Unendlichkeit drückt sich formal als **axiomatische Ontologie** aus. Das Paradigma liefert ZFC (andere Mengen- und Klassentheorien variieren nur die Problemstellungen und Konstrukte).

Die axiomatische Ontologie muss auf der einen Seite epistemisch befragt werden nach ihrem Status – jenseits bloßer Konvention – und ihrer Leistung (etwa, als Grundlage einer angewandten Mathematik).

Sie scheint das Musterbeispiel auch eines akademischen Glasperlenspiels, welches die Irrelevanz der formalen Philosophie vorführt. Ein Einspruch, der heute auch gerne gegen die Analytische Philosophie im Allgemeinen vorgebracht wird.

Doch kann es keine Popularisierer philosophischer Inhalte geben ohne klare philosophische Inhalte.

ZFC errichtet einen Standard der formalen Präzision. Ontologisch und epistemologisch dreht sich die Kontroverse um das Prinzip der Domäne, also letztlich um die Semantik von Allaussagen. Die Thematik der Unendlichkeit leitet damit ihre Fragen an die allgemeine Semantik weiter und empfängt neue Optionen aus der allgemeinen Semantik.

Ontologisch steht auch die Problematik des Platonischen Realismus vs. Anti-Realismus (Nominalismus) im Raum.

In einer Phase der Philosophie hingegen, die sich selbst verstehen kann als die Überwindung vieler Dogmen und der Entwicklung einer anti-dogmatischen Haltung, sollten wir auch die Dogmatik der empiristischen Metaphysikkritik und des Logischen Atomismus/Empirismus hinter uns lassen können. Die ‚Überwindung der Metaphysik‘ wurde überwunden!

Deshalb kann man auch seine (empiristischen) Intuitionen, die sich gegen die Vorstellbarkeit abstrakter Gegenstände im Allgemeinen und der Iterativen Hierarchie im Besonderen richten, hintanstellen.

Warum sollte Modellbildung mittels axiomatischer Ontologie nicht *ein* Zugang zur bestmöglichen Theorie und schließlich zur Wahrheit sein? Innerhalb der Breite solcher axiomatischen Ontologien wäre abzuwägen, ob die Postulate, die ZFC direkt als Axiome formuliert und die indirekt – bezüglich des Universums V selbst – unterstellt werden, nicht gelungener ausfallen als konkurrierende Postulate etwa eines parakonsistenten Finitismus.

Halten wir fest: ZFC (und damit das Modell der Iterativen Hierarchie inklusive ‚Cantors Paradies‘) liefert eine ausgearbeitete axiomatische Ontologie des Unendlichen, in der die relevanten Begriffe geklärt werden. Die entscheidende Frage ist nicht, ob ZFC eine gelungene Theorie ist, sondern, ob wir die Ontologie der Iterativen Hierarchie (inklusive der Sonderrolle von V selbst) annehmen wollen.

4. Eine eigenständige Rolle in der Reflektion der Unendlichkeit spielen theologische und **religionsphilosophische Vorstellungen**. Gott und Ewigkeit müssen in der ein oder anderen Form – zumindest in den theistischen Religionen – als nicht begrenzt gedacht werden.

Auf der einen Seite sind religiöse Annahmen Gegenstand eines nicht-demonstrierbaren religiösen Glaubens – und können so das Unendliche nicht jedermann vorführen oder nachweisen.

Auf der anderen Seite kann die Begegnung mit Gott eine bewusste Erfahrung einer Begegnung mit dem Unendlichen sein. Gegeben die theistische Ontologie und Offenbarungslehre *können wir* dem Unendlichen begegnen.

Dass wir eine Entität mit einer Eigenschaft begegnen allerdings heißt nicht, dass wir diese Eigenschaft in ihrer Besonderheit erkennen. Dem Unendlichen zu begegnen heißt also nicht *per se*, das Unendliche als Unendliches zu begreifen und zu erkennen!

Halten wir fest: Religionsphilosophische Überlegungen bieten außerhalb der theoretischen Philosophie zusätzliche Argumente für die Kohärenz bestimmter mit Unendlichkeit verknüpfter Begriffe (wie der Ewigkeit). Die Annahme dieser Unendlichkeiten kommt allerdings einem Akt *religiösen* Glaubens außerhalb der theoretischen Modellierung gleich.

Versuchen wir also – in einem nochmaligen Durchgang durch die Versatzstücke einer Theorie des Unendlichen – einige **epistemologischen Desiderate eines Erkennens des Unendlichen** zusammenzutragen:

1. Aktuelle Unendlichkeit war die schwierigste Vorstellung in unseren metaphysischen Reflexionen. Eine Verharmlosung scheint darin zu bestehen, dass abstrakte Objekte – aufgrund ihres schwierigen ontologischen Status – billig sind bzw. sie können mit weiteren ontologischen Festlegungen befrachtet werden. Wenn es abstrakte Gegenstände wie Mengen gibt, warum dann nicht unendlich viele von ihnen? Warum nicht gleich die ganze Iterative Hierarchie?

Die Schwierigkeiten können hier nicht in einem ontischen Platzproblem bestehen. Die Schwierigkeiten müssen vielmehr eine begriffliche Grundlage haben. Die Paradoxien des Unendlichen weisen auf intuitive Schwierigkeiten hin, sie etablieren jedoch gerade keine echten Schwierigkeiten, die eine axiomatische Mengenlehre wie ZFC mit der Vorstellung der Iterativen Hierarchie nicht beseitigen könnte.

Das heißt: Wir können also – eben in der reinen Mengenlehre – die Kohärenz des Begriffes der aktuellen Unendlichkeit einsehen. Damit alleine *erkennen* wir jedoch nicht die aktuelle Unendlichkeit.

2. Solange Zahlen und Mengen nicht als Konkreta verstanden werden, ist es plausibler, eine aktuelle Unendlichkeit von ihnen anzunehmen als eine potentielle Unendlichkeit, in der immer neue Mengen und Zahlen entstehen müssten. Woher und wie sollten abstrakte Gegenstände *entstehen* können – insbesondere reine Mengen?

Das heißt: Ein (mathematischer) Konstruktivismus trägt nicht zur Verminderung der Schwierigkeiten mit dem Unendlichen bei.

3. Fasst man Zahlen und Mengen als Redeweisen über konkrete Objekte auf – in einer zu klärenden Weise also nominalistisch – dann kann es sein, dass einige Redeweisen einfach nicht gebraucht werden. Einige Redeweisen werden noch nicht aufgetreten

sein, insofern wir den entsprechenden Strukturen nicht begegnet sind. In dieser Vorgehensweise gibt es keinen Raum für aktuelle Unendlichkeit, sondern nur für *indefinite* Erweiterbarkeit (Gruppierung und immer wieder Gruppierung von konkreten Objekten führt immer nur zu endlichen Kollektionen) – eventuell ist Raum für potentielle Unendlichkeit (der Umgruppierung). Der Umstand, dass ZFC uns ‚natürlich‘ vorkommt und sich uns der Begriff der Menge aufdrängt, bedeutet nicht, dass diesem auch Objekte entsprechen. Es kann sich um ein effektives und leichter verständliches Rahmenwerk handeln, obwohl im Prinzip eine Wissenschaft ohne Zahlen und Mengen – umständlicher – formulierbar wäre.

Das heißt: Eine nominalistische Haltung, die eine finitistische Komponente integriert, lässt sich einnehmen. Es stellt sich die epistemologische Problematik, wie man abwägen soll zwischen mutmaßlicher ontologischer Sparsamkeit (eines nominalistischen Indefinitismus) und theoretischer Eleganz (von ZFC).

4. Die Herleitung der Idee des Unendlichen aus dem Begriff des Endlichen und der unbestimmten Negation „un“ lässt die Begriffsgenese auf eine einfache Form nachvollziehen. Der Begriff des Unendlichen kann auch z.T. zurückgehen auf den Begriff und die Vorstellung einer beliebig großen Kollektion. Selbst wenn all dies indessen auf das Unendliche führt, bleibt offen, ob dies das potentiell oder aktual Unendliche ist. Und selbst wenn es die aktuelle Unendlichkeit von \mathbb{N} wäre, gehen die Postulate von ZFC deutlich über das Unendlichkeitsaxiom hinaus. Das Auswahlaxiom behauptet die Existenz beliebig großer Auswahlen. Das Ersetzungsaxiom behauptet, dass beliebig große Funktionen auf beliebig großen Mengen Mengen als Nachbereiche haben. Die Schwierigkeiten von ‚Cantors Paradies‘ treten mit *Cantors Theorem* auf, also dem allgemeinen Potenzmengenaxiom. Hier scheinen sich (begriffliche) Intuitionen bezüglich von Mengen oder Kollektionen zu paaren, um ein neues ontologisches Problem zu generieren. Denn der Begriff der Potenzmenge scheint allerdings sicher.

Das heißt: ‚Cantors Paradies‘ und Theorien stark unerreichbarer (überabzählbarer) Kardinalzahlen scheinen auf der einen Seite unsere Vorstellungskraft zu sprengen – was intuitiv und epistemologisch gegen sie spricht – ZFC selbst artikuliert hingegen *abseits* des Unendlichkeitsaxioms nur elementare Begriffe, die wir von Kollektionen wie Mengen und Funktionen auf diesen besitzen. Der Fokus muss also auf dem Unendlichkeitsaxiom liegen.

5. Man könnte geneigt sein, die aktuelle Unendlichkeit zu legitimieren als bloße Ausdehnung unserer Vorstellung des indefinit Großen. Eine solche Legitimation ließe sich jedoch umdrehen als Beschränkung: überall da, wo vermeintlich vom Unendlichen die Rede ist, könnte man genauso gut indefinit Großen reden. Die Rede vom ‚Unendlichen‘ (d.h. entsprechende Redewendungen und Floskeln wie „es gibt unendlich viele Weisen der Gruppierung“) ließen sich rekonstruieren als (i) keine unendlichen Objekte (wie Mengen) betreffend, sondern (ii) als Verweise auf Möglichkeiten, die mit geregelten Prozessen (wie denen des Zählens und Gruppierens) vorliegen. In diesem Sinne gäbe es keinen ‚konstitutiven Gebrauch‘ des Begriffs der Unendlichkeit, nur einen ‚regulativen‘.

Das heißt: Man kann die Problematik des aktual Unendlichen auffassen als eine Variation bzw. Ergänzung der Diagnose der Dialektik der reinen theoretischen Vernunft (bei Kant).

6. Eine aktuelle Unendlichkeit kann uns in unseren finiten Repräsentationen nur mittels eines Namens, nie ganz in irgendeiner Anschauung gegeben werden. Was uns gegeben werden kann ist eine Reihe, deren Fortsetzung wir antizipieren. Die potentielle Unendlichkeit einer Reihe können wir so denken und in der bisher bekannten Reihe sachlich verankern. Insofern steht uns der Begriff der potentiellen Unendlichkeit eher zur Verfügung. Er lässt sich direkt an unsere Erfahrung der Zeit anbinden. Das Fortlaufen der Zeit ist das Paradigma der potentiellen Unendlichkeit. In diesem Sinne ist der Begriff der Ewigkeit als Fortdauer verständlicher als der Begriff einer unendlichen oder sogar überabzählbar unendlichen Menge.

Die Zeit als unendliche Reihe kann uns direkt gegeben werden. Wir bewegen uns mit unserem ‚inneren Sinn‘ unmittelbar in der potentiellen Unendlichkeit. Die *Referenz* auf eine unendliche Reihe kann – wenn es diese denn gibt – *direkt verankert* werden. Direkte Verankerung kann bei reinen Mengen als abstrakten Entitäten nicht auftreten. Insofern müssen hier Postulate an die Stelle der (inneren) Erfahrung treten. Selbst wenn es aktuelle Unendlichkeit gibt, kann Referenz auf sie nur indirekt (per ihrer Rolle in einer Theorie, die letztlich wahr ist) von uns *nachvollzogen* werden.

– Es sei denn, es gäbe eine besondere mathematische Intuition nicht nur von mathematischen/logischen Kategorien und Begriffen (wie bei Husserl), sondern von mathematischen/logischen Entitäten im Allgemeinen (wie Gödel nahelegt). Dann könnte es auch eine Intuition des aktual Unendlichen geben. Allein: Wer kann diese Intuition in sich vorfinden? Scheinbar wenige. Auch lässt sie sich nicht einem anderen

andemonstrieren oder vorführen: alles spricht gegen sie.

Das heißt: „V“ als Name, der in der Erläuterung von ZFC auftritt, referiert auf V, wenn es denn V gibt, ob wir dies erkennen oder nicht. Der Name „die Zeit“ referiert auf die Zeit, die wir unmittelbar erleben, hier kann es eine erlebte Verankerung einer Referenz auf das (potentiell) Unendliche geben, wenn die Zeit denn unendlich ist.

Damit sind nicht alle Aspekte einer epistemologischen Erörterung des Unendlichen aufgezählt. Insbesondere Fragen nach der Semantik von Allaussagen (auch in Beziehung auf die Legitimation des Prinzips der Domäne) (i) und der Erforderlichkeit einer letztlich parakonsistenten Metatheorie in der Semantik und damit auch der Mengenlehre (ii) werden aufgrund der involvierten veränderten Logik die ganze Orientierung einer axiomatischen Ontologie (und damit ZFC und insbesondere Cantors Theorem) betreffen.

Eine finitistische Theorie – insbesondere eine parakonsistente – ist möglich. Das macht sie – wie immer bei möglichen Theorien – jedoch nicht zur besten Theorie. Gibt es das Unendliche, ist sie schlichtweg falsch. Auch solange wir nicht wissen, ob es das Unendliche gibt, müssen wir diese finitistische Theorie nicht als die *best-formulierte* Theorie ansehen.

Eine quasi-finitistische Semantik der Allquantifikation legt sich per Quantifikation *höchstens* auf das potentiell Unendliche fest. Eine parakonsistente Mengenlehre kann, selbst *wenn* sie das Unendlichkeitsaxiom annimmt, den Aufstieg zum Überabzählbaren blockieren.

Eine *minimalste* Auffassung des Unendlichen – abgesehen von religiösen Glaubensinhalten – beinhaltet daher die potentielle Unendlichkeit der Zeit.

Eine *minimale* Auffassung des Unendlichen – abgesehen von religiösen Glaubensinhalten – ergänzt die aktuelle Unendlichkeit als abzählbare Unendlichkeit der ganzen/rationalen Zahlen, die im Übrigen für jede angewandte mathematisierte Theorie ausreichen.

Gegeben diese minimale Auffassung erfordern die religiösen Glaubensinhalte jedenfalls keine weiteren *metaphysischen* Investitionen bezüglich Unendlichkeit, da Gottes aktuelle Unendlichkeit und die potentielle Unendlichkeit des Jenseits abgedeckt sind.

Hat man allerdings einmal die aktuelle Unendlichkeit angenommen erscheint am Horizont als letztlich umfassende Auffassung ‚Cantors Paradies‘.